ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES - OPTION M.P. -

Durée : 4 heures

Le sujet est constitué de deux parties ,non indépendantes , mais qu'il est cependant possible de traiter séparément .

PARTIE I

A ETUDE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE : $x^2 y' + y = x$ (1)

1° a) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière solution de (1)

Déterminer a_n en fonction de n .

b) Déterminer les solutions de (1) développables en série entière sur un intervalle $]-a,a[$ avec $a > 0$

2° a) Etudier la convergence de l'intégrale $a(x) = \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$ pour $x>0$

b) Exprimer toutes les solutions de (1) sur $]0,\infty[$ à l'aide de a(x)

3° Dans cette question et dans toute la suite du problème on pose

$$\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = e^{\frac{1}{x}} a(x)$$

a) Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u} du$$

b) Démontrer que l' unique solution de (1) sur $]0,+\infty[$ prolongeable par continuité en 0 est la fonction f

B ETUDE DE LA FONCTION f AU VOISINAGE DE 0

Dans toute la suite,on pose $\forall n \in \mathbb{N} , \forall x \in]0,+\infty[$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$$

1° a) Justifier pour tout entier $n \geq 0$ la convergence de l'intégrale $R_n(x)$

b) On admet que pour tout entier naturel k , $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$

En exprimant $f(x) - R_n(x)$ comme une somme , prouver pour tout réel $x > 0$

la relation : $f(x) - R_n(x) = f_n(x)$ (2)

(f est la fonction définie à la question 3°)

2° Démontrer que la fonction f admet un développement limité à tout ordre en 0 et préciser ce développement.

3° a) Démontrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

b) Démontrer que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$

C ETUDE DE LA FONCTION f AU VOISINAGE DE $+\infty$

On définit dans cette partie la fonction $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{n}{x}}}{1+n}$

1° a) Démontrer que g est définie et continue sur $]0,+\infty[$

b) Déterminer la limite de g(x) en 0

2° Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq g(x) - f(x) \leq 1$

3° Calculer la somme de la série g(x) en fonction de x et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

4° En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$

5° a) Etablir une relation liant f'(x),f"(x) pour x>0

b) Soit $n \geq 1$.établir une relation liant $f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x), f^{(n+2)}(x)$,pour x>0.

6° Soit $n \geq 1$ Déterminer un équivalent de $f^{(n)}(x)$ pour $x \to +\infty$, sous forme d'une fonction puissance.

PARTIE II

A APPROXIMATION EXPONENTIELLE D'ORDRE k EN 0

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,\alpha[$,$\alpha>0$ et $k > 0$ un réel donné.
On dira que g est une approximation exponentielle d'ordre k de f en 0 ssi

$$\exists\, \lambda > 0 \ , \ f(x) - g(x) = \underset{x \to 0, x>0}{O}\left(e^{\frac{-\lambda}{x^k}} \right)$$

La notation O désigne la relation de domination

1° On suppose que g est une approximation exponentielle d'ordre k de f en 0 .
g est alors une approximation exponentielle d'ordre k' de f en 0 , pour tout réel k' tel que : $\alpha)\ 0 < k' \leq k$, respectivement : $\beta)\ k \leq k'$
on montrera ,en justifiant, que l'une de ces deux affirmations est exacte.

2° On suppose que f et g sont définies sur $]-\alpha,\alpha[$ ($\alpha>0$) , et toutes deux développables en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$.
On suppose de plus qu'il existe k tel que g soit une approximation exponentielle d'ordre k de f en 0 .
Prouver que f = g

B EXEMPLE D'APPROXIMATION EXPONENTIELLE

On reprend les notations de la partie I

On admettra que : $\forall\, x>0 \ , \ \forall\, n \geq 1 \ , \ | f(x) - f_n(x) | \leq n!\ x^{n+1}$ (3)
on fixe le réel $x>0$, $x<1$

1° Pour quelle valeur N de n la majoration (3) fournit elle l'encadrement le plus précis de f(x) ? on exprimera N en fonction de la partie entière de $\frac{1}{x}$

2° On définit la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\ (n-1)!\ x^n$

a) Démontrer l'inégalité $| f(x) - S(x)| \leq N!\ \left(\frac{1}{N}\right)^{N+1}$

b) A l'aide de l' équivalent de Stirling de N!,que l'on rappélera , démontrer que l'application $x \to S(x)$ est une approximation exponentielle d'ordre 1 de f en 0

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail